# Lycée Marsa Erriadh

Mercredi 16/12/2020

4sc2

## Devoir de synthèse de maths (2h)

Proposé Par M Hedi Ben Rejeb

### Exercice 1 (3.5pts)

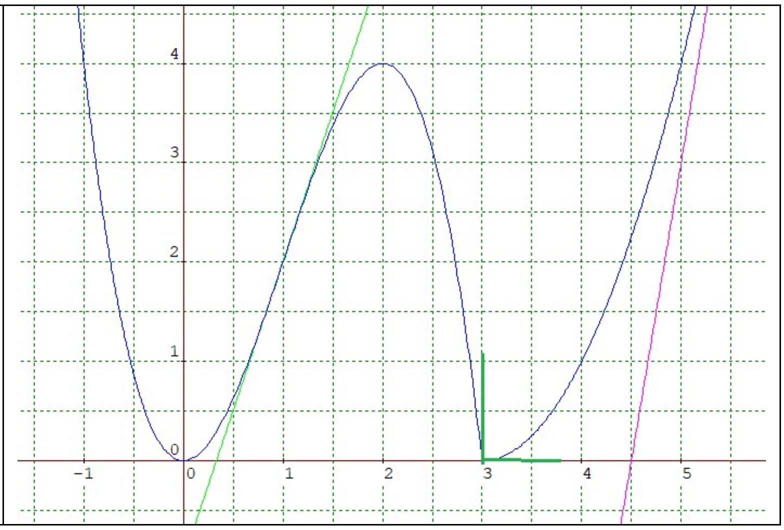
La courbe en bleu ci-contre est la représentation graphique d'une fonction $f$.

Déterminer

$f'(2), f'_d(3), f''(1)$

$\lim \dfrac{f(x)}{x}$ $en -\infty, 0\ et\ en +\infty$

$\lim\limits_{x \to \left(\frac{5}{2}\right)^+} \dfrac{f \circ f(x)}{f(x)-3}$




### Exercice 2 (3.5pts)

On considère la fonction $f$ définie sur IR* par $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$

1) Montrer que $f$ est impaire.
2) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3) Montrer que $f$ est prolongeable par continuité en 0.
4) Définir le prolongement g de $f$.
5) Etudier la dérivabilité de g en 0.
6) Soit $h \approx 0$, donner une approximation affine de g(h).

### Exercice 3 (4.5pts)

On considère la fonction $f$ définie sur $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sin x$

1) Montrer que $f$ réalise une bijection de $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$.
2) Tracer les courbes de $f$ et de sa réciproque $f^{-1}$ sur le même repère.
3) Etudier la dérivabilité de $f^{-1}$ à gauche en 1.
4) Montrer que $f^{-1}$ est dérivable sur $]-1,1[$ et que $(f^{-1})'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

## Exercice 4 (8.5pts)

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

Soit $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et soit l'équation $E_\theta : z^2 - 2\left(1+ie^{i\theta}\right)z + 4ie^{\theta} = 0$

**PARTIE A)** Répondre par vrai ou faux, en justifiant la réponse :

a) Il existe une valeur de $\theta$ pour laquelle l'équation $E_\theta$ admet deux racines inverses.

b) Il existe une valeur de $\theta$ pour laquelle l'équation $E_\theta$ admet deux racines opposées.

c) Il existe une valeur de $\theta$ pour laquelle l'équation $E_\theta$ admet une racine double.

**PARTIE B)**

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $E_\theta$.

2) On considère les points $A(2), M_\theta\left(2ie^{i\theta}\right), N_\theta\left(-2ie^{-i\theta}\right)$

a) Vérifier que $AM_0M_{\frac{\pi}{2}}N_0$ est un carré.

b) Déterminer et construire l'ensemble $\Gamma$ des points M(z) pour lesquels $\frac{z+2}{z-2}$ est imaginaire pur.

c) Ecrire $z_{M_\theta}$ *et* $z_{N_\theta}$ sous forme algébrique et exponentielle.

d) Déterminer l'ensemble des points $M_\theta$ lorsque $\theta$ *décrit* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

e) En déduire l'ensemble des points $N_\theta$.

f) Montrer que $\frac{-2ie^{-i\theta}-2}{2ie^{i\theta}-2} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ et en déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{AM_\theta},\overrightarrow{AN_\theta}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta[2\pi]$

g) Déterminer la valeur de $\theta$ pour laquelle le triangle A$M_\theta N_\theta$ est équilatéral.

h) Faire une figure pour $\theta = \frac{\pi}{6}$.

## Exercice 1 (3.5pts)

| | | |
|---|---|---|
| | $f$ admet un maximum local en 2 donc $f'(2)=0$ | 0.5 |
| | La demi-tangente à droite en 3 est horizontale donc $f'_d(3)=0$ | 0.5 |
| | La tangente verte traverse la courbe donc $f''(1)=0$ | 0.5 |
| | $C_f$ *admet une BP de direction* $(y'y)$ *au* $V_{-\infty}$ *donc* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ | 0.5 |
| | $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=0$ | 0.5 |
| | $y=6x-27$ *est une asymptôte oblique de* $C_f$ *au* $V_{+\infty}$ *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=6$ | 0.5 |
| | $\begin{cases}\lim\limits_{x\to\left(\frac{5}{2}\right)^+} f(x)=3^-\\ \lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{f(x)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=-\infty\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\left(\frac{5}{2}\right)^+}\dfrac{f\circ f(x)}{f(x)-3}=-\infty$ | 0.5 |

## Exercice 2 (3.5pts)

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $\begin{cases}-x\in D_f\\ f(-x)=\dfrac{1-\cos(-x)}{-x}=-f(x)\end{cases}\Rightarrow f\ est\ impaire$ | 0.5 |
| 2) | $Pour\ x<0, on\ a\ -1\le\cos x\le1\Rightarrow-1\le-\cos x\le1\Rightarrow0\le1-\cos x\le2$<br>$\Rightarrow\dfrac{2}{x}\le f(x)\le0\ et\ comme\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$<br>$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-f(-x)=-0=0\ car\ (-x)\to-\infty$ | 1 |
| 3) | $\begin{cases}0\notin D_f\\ \lim\limits_{0}f=\lim\limits_{0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0\in IR\end{cases}\Rightarrow f\ est\ prolongeable\ par\ cté\ en\ 0$ | 0.5 |
| 4) | $Le\ prolongement\ par\ cté\ de\ f\ est\ la\ fonction\ g\ définie\ par:\begin{cases}g(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}\ pour\ x\ne0\\ g(0)=0\end{cases}$ | 0.5 |
| 5) | $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}g\ dé\ en\ 0\\ g'(0)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ | 0.5 |
| 6) | $h\approx0\Rightarrow g(h)\approx g(0)+hg'(0)\Leftrightarrow\boxed{g(h)\approx\dfrac{h}{2}}$ | 0.5 |

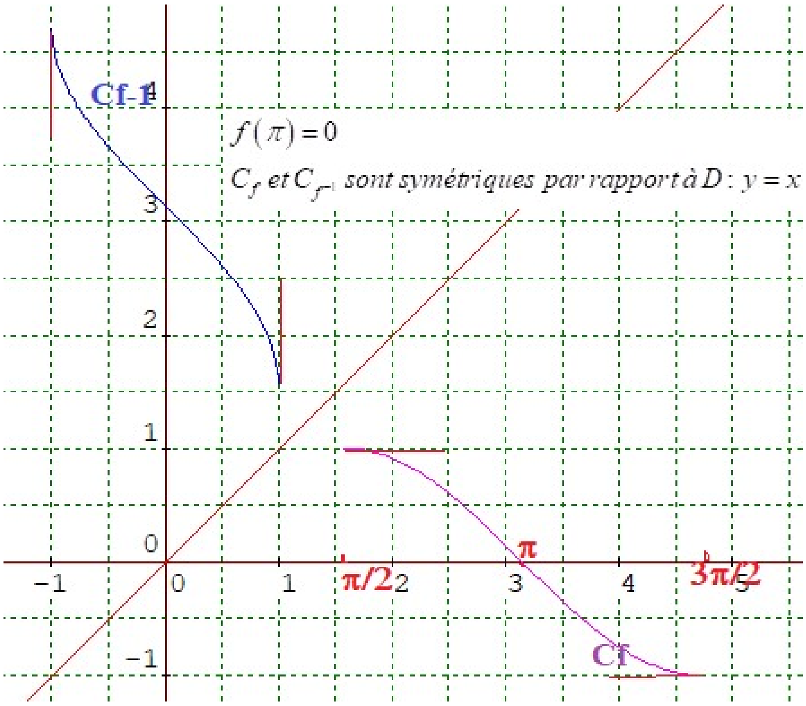
## Exercice 3 (4.5pts)

1)

$$\begin{cases} f \text{ est ct sur} \left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right] \\ f \text{ est st} \searrow \text{ sur} \left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right] \end{cases} \Rightarrow f \text{ réalise une bijection de} \left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right] \text{sur } f\left(\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\right)=[-1,1]$$

**0.5**

2)




**1.5**

3)

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(1)}{x-1}\,? \quad \text{Posons } y=f^{-1}(x) \text{ avec} \begin{cases} x\in[-1,1] \\ y\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow f(y)=x$$

$$x\to 1^- \Leftrightarrow y\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+ \Rightarrow \lim_{x\to 1^-}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(1)}{x-1} = \lim_{y\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\frac{y-\frac{\pi}{2}}{f(y)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \lim_{y\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\frac{1}{\dfrac{f(y)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{y-\frac{\pi}{2}}} = \cancel{\frac{1}{0}} = -\infty \Rightarrow f^{-1} \text{ n'est pas dérivable à gauche en } 1.$$

**1**

4)

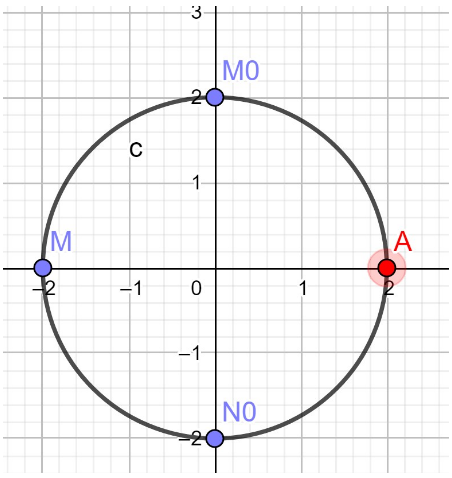
$$\begin{cases} f \text{ dé sur} \left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[ \\ f'(x)\neq 0 \text{ sur} \left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f^{-1} \text{ dé sur sur } ]-1,1[ \\ \left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]} \end{cases}$$

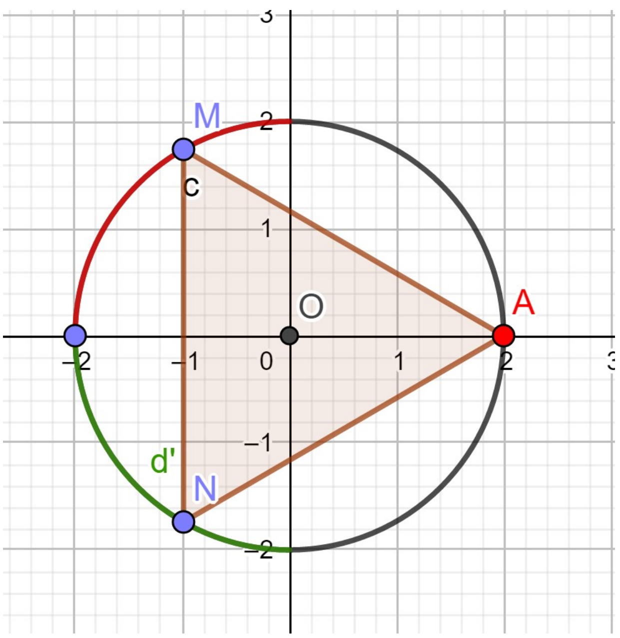
$$\boxed{\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)'(x) &= \frac{1}{f'(y)} \\ &= \frac{1}{\cos y} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & f^{-1}(x)=y \text{ avec} \begin{cases} x\in]-1,1[ \\ y\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[ \end{cases} \\ & \Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow \sin y = x \Rightarrow 1-\cos^2 y = x^2 \\ & \Rightarrow \cos y = -\sqrt{1-x^2}\end{aligned}}$$

**1**

## Exercice 4 (8.5pts)

| | | |
|---|---|---|
| **A) a)** | $E_\theta$ admet deux racines inverses $\Leftrightarrow z'z''=1 \Leftrightarrow \frac{c}{a}=1 \Leftrightarrow$ <br> $4ie^{i\theta}=1 \Leftrightarrow 4e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=1\,impossible$ | Faux 0.75 |
| b) | $E_\theta$ admet deux racines opposés $\Leftrightarrow z'+z''=0 \Leftrightarrow -\frac{b}{a}=0 \Leftrightarrow$ <br> $2\left(1+ie^{i\theta}\right)=0 \Leftrightarrow e^{i\theta}=i=e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{2}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ | Vrai 0.75 |
| b) | $E_\theta$ admet une racine double $\Leftrightarrow \Delta'=0 \Leftrightarrow$ <br> $\left(1+ie^{i\theta}\right)^2-4ie^{i\theta}=0 \Leftrightarrow 1-2ie^{i\theta}-e^{2i\theta}=0 \Leftrightarrow \left(1-ie^{i\theta}\right)^2=0$ <br> $\Leftrightarrow e^{i\theta}=-i=e^{-i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \theta=-\frac{\pi}{2}\notin\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ | Faux 0.75 |
| **B) 1)** | $\Delta'=\left(1-ie^{i\theta}\right)^2 \Rightarrow \delta'=1-ie^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} z'=2 \\ z'=2ie^{i\theta} \end{cases}$ <br> $S_{\mathbb{C}}=\left\{2,2ie^{i\theta}\right\}$ | 0.5 |
| **2) a/** | $A(2), M_0(2i), M_{\frac{\pi}{2}}(-2)\,et\,N_0(-2i)$ <br> $aff\left(\overrightarrow{AM_0}\right)=2i-2=aff\left(\overrightarrow{N_0M_{\frac{\pi}{2}}}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AM_0}=\overrightarrow{N_0M_{\frac{\pi}{2}}} \Rightarrow AM_0M_{\frac{\pi}{2}}N_0\,est\,un\,\#$ <br> $de\,plus\,AM_0=2\sqrt{2}=AN_0\,et\,AM_{\frac{\pi}{2}}=4=M_0N_0 \Rightarrow AM_0M_{\frac{\pi}{2}}N_0\,est\,un\,carré$ | 1 |
| **b/** | $\frac{z+2}{z-2}\in iIR \Leftrightarrow \frac{z_M-z_{M_{\frac{\pi}{2}}}}{z_M-z_A}\in iIR \Leftrightarrow \overrightarrow{M_{\frac{\pi}{2}}M}\perp\overrightarrow{AM}$ <br> $\Gamma\,est\,le\,cercle\,de\,diamètre\left[AM_{\frac{\pi}{2}}\right]privé\,de\,A$ <br>   | 1 |
| **c/** | $z_M=2ie^{i\theta}=2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=-2\sin\theta+2i\cos\theta$ <br> $z_N=\overline{z_M}=2e^{-i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=-2\sin\theta-2i\cos\theta$ | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| **d/** | $z_M = 2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} \Leftrightarrow \begin{cases} \lvert z_M\rvert = 2 \\ \arg(z_M)\equiv \theta+\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OM = 2 \\ \left(\widehat{\vec{u},\vec{OM}}\right)\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right] \end{cases}$<br>*l'ensemble des points M est l'arc* $\widehat{M_0M_{\frac{\pi}{2}}}$ *de* $\Gamma$. | **0.75** |
| **e/** | $z_{N_\theta} = \overline{z_{M_\theta}} \Leftrightarrow N_\theta = s_{(xx')}(M_\theta) \Rightarrow$ *l'ensemble des pts* $N_\theta$ *est l'arc* $\widehat{M_{\frac{\pi}{2}}N_0}$ | **0.5** |
| **f/** | $\frac{-2ie^{-i\theta}-2}{2ie^{i\theta}-2} = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}+1}{1-e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}} = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}}{-2i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}}$<br>$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$<br>$\left(\widehat{\vec{AM_\theta},\vec{AN_\theta}}\right)\equiv\left(\widehat{\vec{AM_\theta},\vec{u}}\right)+\left(\widehat{\vec{u},\vec{AN_\theta}}\right)[2\pi]$<br>$\equiv Arg\left(\frac{-2ie^{-i\theta}-2}{2ie^{i\theta}-2}\right)[2\pi]$<br>$\equiv \frac{\pi}{2}-\theta[2\pi]$ | **1** |
| **g/** | $\frac{\pi}{2}-\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ *et* $AM_\theta = AN_\theta$<br>$AM_\theta N_\theta$ *equilatéral* $\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$ | **0.5** |
| **h/** |  | **0.5** |